ملاحظة :

اذا كانت المتسلسلة المعطاة في المرحلة السابقة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ متقاربة عند النقطة z_1 عندئذ تكون هذه المتسلسلة متقاربة عند النقاط z حيث $|z-z_0| \leq |z_1 - z_0|$

أما اذا كانت النقطة z في خارجية الدائرة C التي مركزها z_0 ونصف قطرها : $|z_1 - z_0| \geq |z - z_0|$ وبالتالي فإن :

$(z - z_1)^n \leq |z_1 - z_0|^n$ و $\frac{1}{|z-z_0|^n} \leq \frac{1}{|z_1-z_0|^n}$

ومن اختبار المقارنة تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)}$ متقاربة اي ان متسلسلة القوى ذات الحدود السالبة تتقارب في خارجية الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها $r_1 = |z_1 - z_0|$

التقارب المنتظم :

لتكن $\sum a_n z^n$ متسلسلة متقاربة ودائرة التقارب لها هي C عندئذ يكون مجموع هذه المتسلسلة هو عبارة عن دالة

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

اي ان :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z)$$

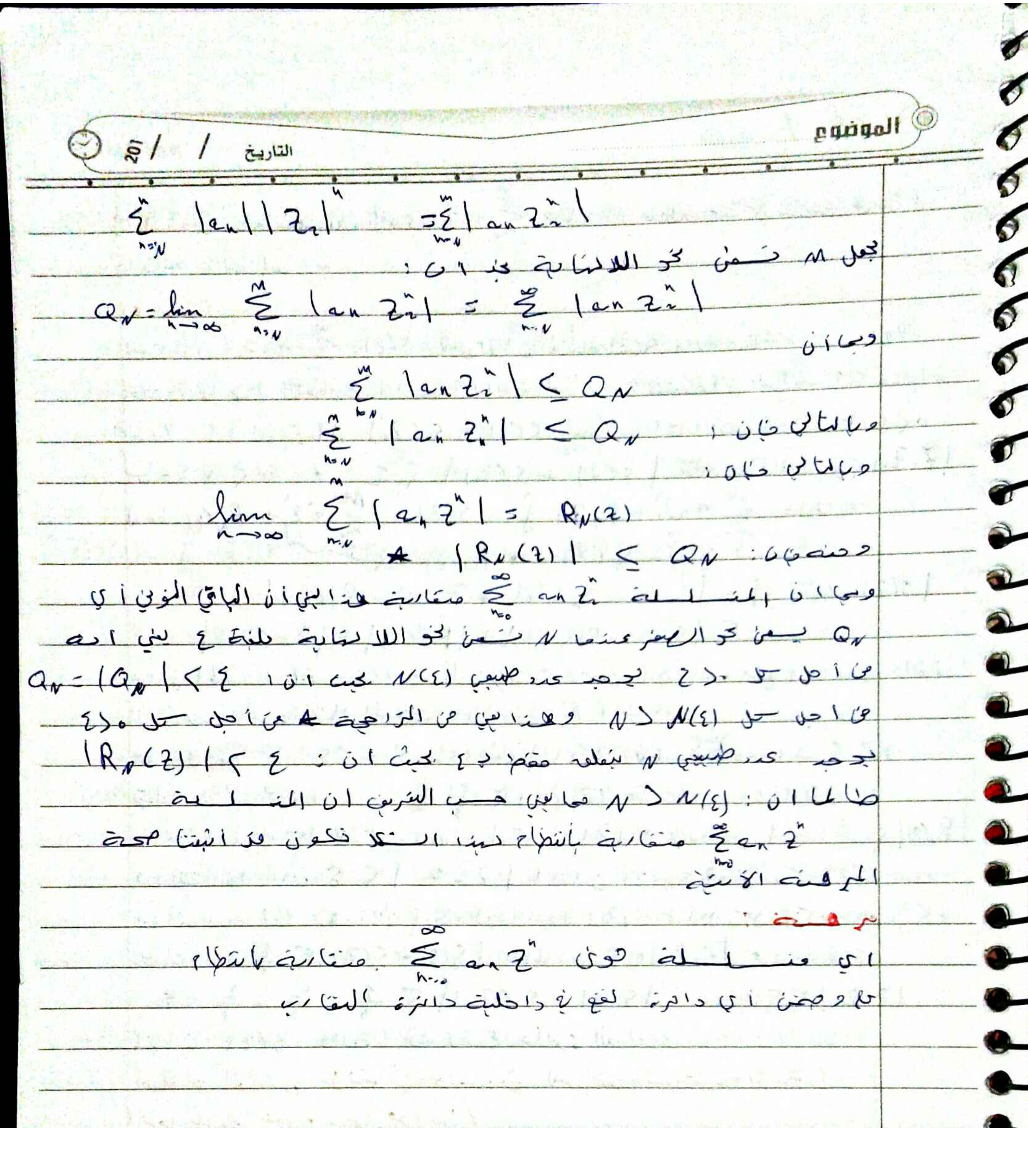
اي ان :

$$R_N(z) = S(z) - S_N(z)$$

نقول عن متسلسلة القوى (1) انها متقاربة بانتظام اذا وفقط اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N يتعلق فقط وفقط بـ ε بحيث ان $|R_N(z)| < \varepsilon$ طالما ان $n > N(\varepsilon)$

لتكن z_1 نقطة من داخلية دائرة التقارب ولنثبت أن : $|z| \leq |z_1|$ من أجل أي عددين طبيعيين N, M بحيث أن $M > N$ بحيث يكون :

$$\left| \sum_{n=N}^{M} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N}^{M} |a_n z^n| = \sum_{n=N}^{M} |a_n| |z|^n \leq$$



الموضوع

التاريخ / / 201

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n||z_1|^n = \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|$$

نجعل m تسعى نحو اللانهاية نجد ان :

$$Q_N = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n| = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z_1^n|$$

وبما ان

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n| \le Q_N$$

وبالتالي فان :

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n z^n| \le Q_N$$

وبالتالي فان :

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} |a_n z^n| = R_N(z)$$

ومنه فان : ★ $|R_N(z)| \le Q_N$

وبما ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ متقاربة فهذا يعني ان الباقي النوني اي Q_N يسعى نحو الصفر عندما N تسعى نحو اللانهاية وهذا يعني انه من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث ان : $Q_N = |Q_N| < \varepsilon$ من اجل كل $N > N(\varepsilon)$ وهذا يعني من المتراجحة ★ من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي N يتعلق فقط بـ ε بحيث ان : $|R_N(z)| < \varepsilon$ طالما ان : $N > N(\varepsilon)$ فهذا يعني حسب التعريف ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة بانتظام وبهذا الشكل نكون قد اثبتنا صحة المبرهنة الاتية

مبرهنة :

اي متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة بانتظام على وضمن اي دائرة تقع في داخلية دائرة التقارب

مبرهنة: متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ تمثل دالة متصلة عند كل نقطة من نقاط داخلية دائرة التقارب

الإثبات:

لنفرض ان $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ولنبين ان الدالة $S(z)$ دالة متصلة z_1 نقطة ما لا على التعيين من داخلية الدائرة التقارب ولنثبت ان الدالة $S(z)$ متصلة عند z_1 اي لنثبت ان $\lim_{z \to z_1} S(z) = S(z_1)$ اي انه من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ و $|S(z) - S(z_1)| < \varepsilon$ طالما ان $|z - z_1| < \delta$

لدينا $S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z)$ و $S(z_1) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z_1^n + R_N(z_1)$

$$S(z) = S_N(z) + R_N(z)$$

$$|S(z) - S(z_1)| = |S_N(z) - S_N(z_1) + R_N(z) - R_N(z_1)|$$

$$\leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |R_N(z)| + |R_N(z_1)|$$

بما ان المتسلسلة متقاربة بانتظام على قرص أي دائرة تقع في داخلية دائرة التقارب استنادا الى المبرهنة السابقة هذا يعني أنه

من اجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ يتعلق فقط بـ ε ولا يتعلق بـ z بحيث ان $|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ طالما ان $N > N(\varepsilon)$

وذلك من اجل كل z بحيث ان $|z| < |z_1|$ وهذا يعني انه $|R_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$

وذلك اذا كان $|z - z_1| < \delta$ اي ان $S_N(z)$ هو عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة $N-1$ وهذا يعني انه دالة متصلة أي انه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث انه $|S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ طالما ان $|z - z_1| < \delta$ ومنه فإن:

$$|S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{طالما} \quad |z - z_1| < \delta$$

أي أن $S(z)$ دالة متصلة في دائرة التقارب

مبرهنة العكس (لكوشي جورسات للمناطق بسيطة الترابط)

أو ما يعرف بمبرهنة (موريرا)

اذا كان f دالة متصلة على المنطقة المغلقة والبسيطة) وكان $\oint f(z)\,dz = 0$ عندئذ تكون f دالة تحليلية

الإثبات:

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

وقد اثبتنا في محاضرة سابقة ان f قابلة للاشتقاق $f'(z) = f(z)$

مبرهنة:

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متقاربة ومجموعها هو $S(z)$ أي أن $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ وكانت الدالة $g(z)$ دالة متصلة على الكفاف المغلق البسيط C والذي يقع ضمن دائرة التقارب عندئذ

$$\int_C g(z) S(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) z^n\, dz$$

الإثبات:

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z) z^n + g(z) R_N(z) \Leftarrow S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + R_N(z)$$

ليكن C كفاف مغلق بسيط يقع ضمن دائرة التقارب عندئذ

$$\int_C g(z) S(z)\, dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z) z^n\, dz + \int_C g(z) R_N(z)\, dz$$

لنثبت بأن قيمة التكامل تسعى نحو الصفر عندما N تسعى نحو اللانهاية بما أن $g(z)$ دالة متصلة على الكفاف المغلق والمحدود C عندئذ g تبلغ قيمتها العظمى أي أن $|g(z)| \le M \quad \forall z \in C$ وبما أن $R_N(z)$ الباقي النوني لمتسلسلة متقاربة هذا يعني أنه من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أنه $|R_N(z)| < \varepsilon$ طالما $N > N(\varepsilon)$ وإذا رمزنا بـ L لطول القوس عندئذ فإن

$$\left| \int_C g(z) R_N(z)\, dz \right| \le M \varepsilon L$$

وهذا يعني أن قيمة التكامل تساوي الصفر عندما N تسعى نحو ∞

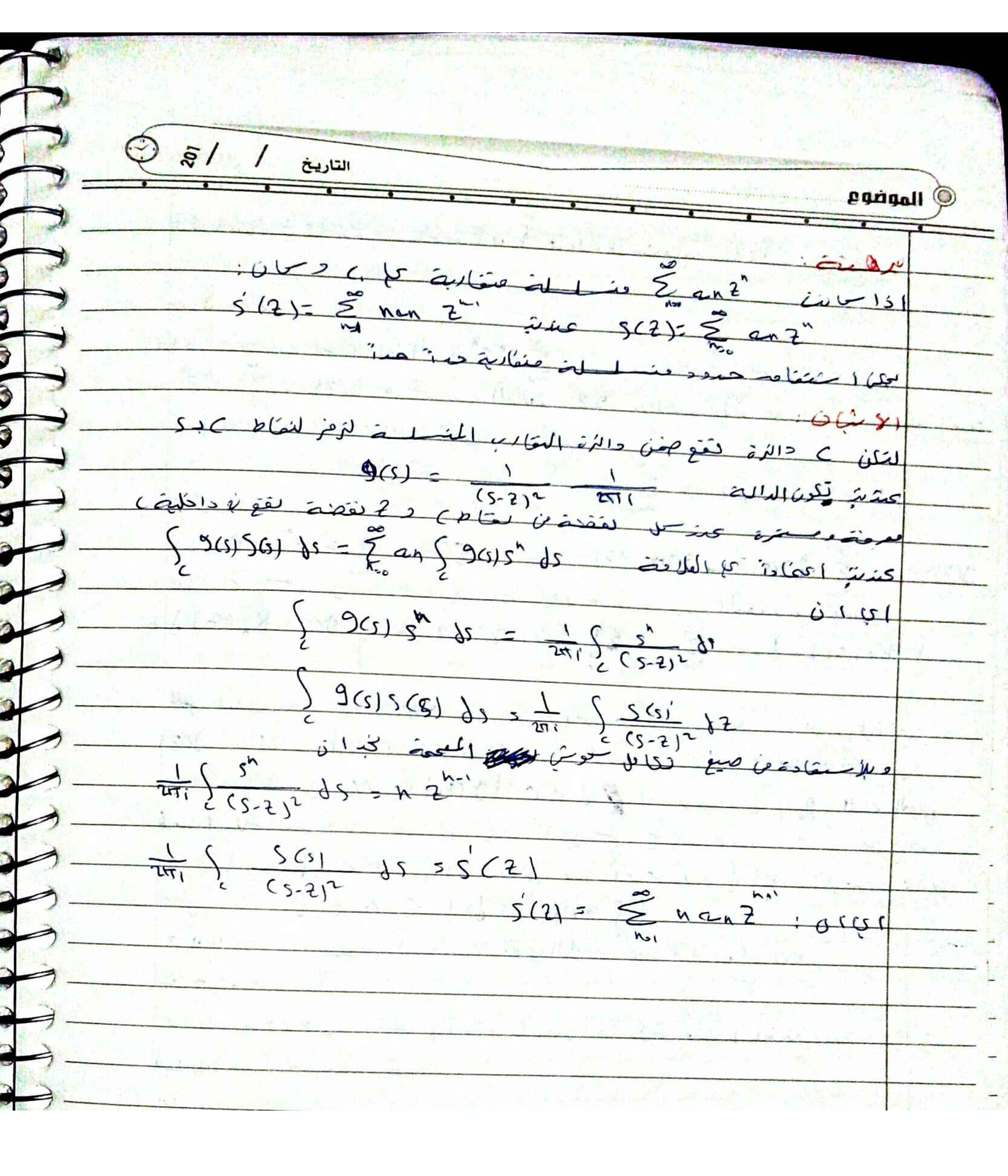
ملاحظة 1:

من العلاقة الأخيرة نستنتج أنه بإمكاننا مكاملة متسلسلة متقاربة وذلك بمكاملة حدودها حداً حداً

ملاحظة 2:

لنفرض أن $g(z) = 1$ عندئذٍ من العلاقة الواردة في المبرهنة السابقة نستنتج أن $\int_C z^n\, dz = 0$ وبالتالي وبالاستفادة من العلاقة الواردة في المبرهنة السابقة يكون $\int_C S(z)\, dz = 0$

من هذه العلاقة نستنتج وبالاستفادة من مبرهنة موريرا بأن الدالة $S(z)$ دالة تحليلية



التاريخ / / 201

الموضوع

مبرهنة:

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة متقاربة على C وكان:

$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ عندئذ $S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

يمكن اشتقاق حدود متسلسلة متقاربة حداً حداً

الإثبات:

لتكن C دائرة تقع ضمن دائرة التقارب المتسلسلة لنرمز للنقاط C بـ s

عندئذ تكون الدالة $g(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(s-z)^2}$

معرفة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط C و z نقطة تقع داخلها

عندئذ المعادلة مع العلاقة $\int_C g(s)S(s)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s)s^n\,ds$

أي أن

$$\int_C g(s)s^n\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s^n}{(s-z)^2}\,ds$$

$$\int_C g(s)S(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2}\,dz$$

وبالاستفادة من صيغ تكامل كوشي المعممة نجد أن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s^n}{(s-z)^2}\,ds = n z^{n-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2}\,ds = S'(z)$$

أي أن: $S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$